

Des modèles mathématiques pour analyser des données – Exercices

Le modèle linéaire

Rayane loue un appartement à Bordeaux. Son contrat de location débute le 1^{er} juin 2025 avec un loyer de 503 euros, qui augmente ensuite de 32 € tous les ans.

On note un le loyer de l'appartement de Rayane, en euros, au bout de n années après le 1^{er} juin 2025. On a donc $u_0 = 503$.

1. On admet que (u_n) est une suite arithmétique. Donner la raison r de cette suite.
2. Quel loyer Rayane devra-t-il payer au 1^{er} juin 2029 ?

On souhaite démontrer la propriété suivante : « si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = (n - p)r + u_p$ »

1. Rappeler l'expression de u_n en fonction de u_0 , n et r .
2. Exprimer de même u_p en fonction de u_0 , p et r .
3. En déduire une expression de u_0 en fonction de u_p , p et r .
4. Conclure.

Pour chacune des suites arithmétiques suivantes, calculer u_{20} .

1. La suite (u_n) est de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.
2. La suite (u_n) est de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 7$.
4. La suite (u_n) est définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.

Le modèle exponentiel

Un banquier propose à son client Monsieur Leonhard le choix entre deux placements :

- P_1 : +100% sur un an, permettant donc de doubler son capital en un an.
 - P_2 : +50% sur les six premiers mois, puis +50% sur les six derniers.
1. Quel placement est le plus avantageux pour M. Leonhard ? Justifier
 2. M. Leonhard suggère alors quatre évolutions de +25%. Par combien son capital sera-t-il alors multiplié ?
 3. Plus généralement, par quel nombre sera multiplié le capital de M. Leonhard après n hausses de taux $\frac{1}{n}$?

Au début d'une infection, la concentration de bactéries dans un organisme s'élevait à 1000 bactéries par mm^3 de sang.

Pour tout entier naturel n , on note (b_n) le nombre de bactéries n jours après le début de l'infection. On admet que le traitement antibiotique administré au malade permet de diviser chaque jour le nombre de bactéries par 3.

1. Justifier que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Quel est le sens de variation de (b_n) ? Justifier.
3. Au bout de combien de temps la concentration de bactéries deviendra-t-elle inférieure à dix bactéries par mm^3 ?

Développer et réduire les expressions suivantes :

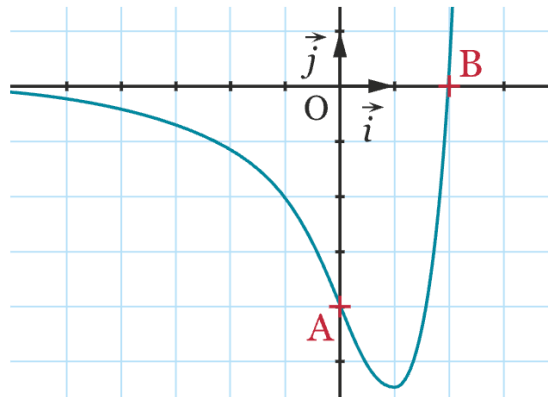
1. $A = e^4(e^3 + e^7)$
2. $B = (e^2 + e^6)(e^3 + e)$
3. $C = (e^8 - e^2)(e^6 + 1)$
4. $D = (e^{-2} + e^3)(e^{-2} + e^9)$

Démontrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout réel x :

1. $\frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$
2. $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$
3. $(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 = e^{3x}(e^{2x} + 1)$

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (ax + b)e^x$$



1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.
2. En déduire les valeurs des réels a et b .